

Министерство образования и науки Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Российский государственный гидрометеорологический университет»

На правах рукописи

УДК 551.465.58+551.46.072

Даньшина Анна Владимировна

**ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ  
НАПРЯЖЕНИЙ НА ФОРМИРОВАНИЕ ГРИБОВИДНОГО ТЕЧЕНИЯ**

Специальность 25.00.28 – Океанология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2011

Диссертация выполнена в ФГБОУ ВПО «Российский государственный гидрометеорологический университет»

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор  
Карлин Лев Николаевич

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор  
Чашечкин Юлий Дмитриевич  
ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН

кандидат физико-математических наук,  
Кременецкий Вячеслав Вячеславович  
ИО им. П.П. Ширшова РАН

**Ведущая организация:** ФГОУ ВПО Московский государственный  
университет имени М.В. Ломоносова

Защита состоится «22» декабря 2011 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.197.02 в Российском государственном гидрометеорологическом университете по адресу: 195196, г. Санкт-Петербург, Малоохтинский проспект, д. 98

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Российского государственного гидрометеорологического университета

Автореферат разослан «18» ноября 2011 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
кандидат географических наук



Воробьев В.Н.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Актуальность темы.**

Грибовидные течения в океане являются универсальной формой движения вод и играют важную роль в горизонтальном обмене примесями, массой и количеством движения. Таким образом, их влияние сказывается на формировании гидродинамического режима и экологической обстановки в море в целом и особенно в его прибрежных районах. Такие структуры выявляются как на спутниковых изображениях поверхности океанов и морей, так и в результате анализа прямых натурных наблюдений за термодинамическими параметрами верхних слоев океана, и генерируются во всем спектре пространственных масштабов. Возможность учета формирования грибовидных течений в математических моделях динамики верхних слоев океана и динамического режима вод прибрежных зон позволяет более точно учитывать особенности распределения количества движения, водных масс и различных примесей, знание которых необходимо при проведении рекреационных мероприятий, гидротехнических работ, а также для выполнения экологических исследований.

Тем не менее, существующие на сегодняшний день математические модели дипольных вихревых структур, хотя и описывают основные особенности и закономерности их развития, но не полностью описывают механизмы их генерации. Ряд исследований показывает, что реальная жидкость, такая как морская вода, при определенных условиях обладает свойствами неньютоновской жидкости. Немногочисленные математические модели, построенные на основе моментной теории упругости, демонстрируют более точное описание динамики водных потоков по сравнению с классической гидромеханикой. В тоже время такие модели не рассматривали случаи преобразования классических уравнений движения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с учетом несимметричности поверхностных напряжений, и не использовались для воспроизведения грибовидных течений. Таким образом, пока еще не исследовалось влияние несимметричности касательных поверхностных напряжений, формируемых за счет деформационных свойств скорости завихренности элементарных объемов жидкости, на генерацию грибовидных течений.

**В связи с этим целью диссертационной работы является:** численное подтверждение выводов несимметричной гидродинамики, заключающихся в параметризации коэффициентов обмена импульсом для уравнений движения с учетом несимметричности поверхностных напряжений, влияющих на формирование и возможность описания генерации грибовидного течения в однородной водной среде при ограничениях, накладываемых на интенсивность источника импульса.

**Для достижения поставленной цели предполагается решить следующие задачи:**

1. Проанализировать существующее на текущий момент современное представление о динамических характеристиках грибовидных течений и механизмах их образования из различных источников информации: спутниковой, натуральных исследований, лабораторных экспериментов и математических моделей.

2. Провести серию лабораторных экспериментов по формированию грибовидных течений при горизонтальном инжектировании струи в однородную по плотности неподвижную жидкость при условии задания «твердой крышки» и без нее для получения данных о распределении скоростей и эволюции других характеристик грибовидного течения.

3. Преобразовать уравнения движения жидкости с учетом несимметричности тензора напряжений.

4. Параметризовать коэффициенты обмена импульсом, исходя из предположения о несимметричности тензора поверхностных напряжений.

5. Построить математическую модель генерации грибовидных течений с учетом полученных коэффициентов обмена импульсом.

6. Осуществить численную реализацию и верификацию данной модели с воспроизведением основных особенностей развития дипольных вихревых структур.

**Научная новизна полученных результатов:**

– Проведена модернизация уравнений движения жидкости с учетом несимметричности тензора поверхностных напряжений.

– Впервые для описания формирования грибовидного течения применялись выводы из теории несимметричной механики жидкости для несжимаемой жидкости при параметризации коэффициентов обмена импульсом.

– Представлена и численно реализована математическая модель, позволяющая описывать генерацию грибовидных течений, на основе модифицированных уравнений движения Навье-Стокса, учитывающих несимметричность поверхностных напряжений.

**Практическая значимость работы:**

– Полученные зависимости, описывающие коэффициенты обмена импульсом на основе несимметричности тензора поверхностных напряжений, могут быть использованы для более глубокого изучения влияния вязкости на формирование упорядоченных вихревых структур, с предоставлением их качественных и количественных оценок.

– Разработанная система основных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости со смешанными производными и с введенными допущениями и упрощениями открывает новые возможности в математическом моделировании динамических процессов в океане и, таким образом, может применяться для воспроизведения сложных динамических структур в морской среде.

– Разработанную модель с небольшими модификациями в дальнейшем можно будет использовать для оценки трансфронтального обмена вод в прибрежных районах, который является важным фактором, влияющим на перенос загрязняющих веществ и экологическую обстановку в данных зонах морей.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Введение несимметричности тензора поверхностных напряжений в уравнения движения жидкости.

2. Параметризация и оценка коэффициентов обмена импульсом при рассмотрении формирования грибовидных течений.

3. Численное воспроизведение грибовидного течения при условии модификации уравнений движения с учетом несимметричности поверхностных напряжений.

**Апробация работы:**

Основные результаты представляемой работы докладывались на Итоговой сессии ученого совета Российского государственного гидрометеорологического университета, 1999 год; на международной конференции “ПОТОКИ И СТРУКТУРЫ В ЖИДКОСТЯХ” (International Conference “FLUXES AND

STRUCTURES IN FLUIDS”), Санкт-Петербург, Пушкин, 1999 год; на международной конференции “Математические методы в образовании, науке и промышленности”, Тирасполь, 1999 год, на международной конференции “Environmental Hazards along the Colombian Pacific and Caribbean Coasts”, Proc. Conference, Cartagena, 2000, на международной научной конференции “Геосистемы: Факторы развития, рациональное использование, методы управления”, Туапсе, 2008 год.

### **Личный вклад автора.**

Результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно. Автор непосредственно занимался проведением экспериментов по воспроизведению грибовидных течений в однородной жидкости и обработкой полученных данных. Осуществил преобразование уравнений Навье-Стокса с учетом несимметричности тензора напряжений, а также параметризацию коэффициентов обмена. Описал математическую модель генерации грибовидных течений и численно реализовал ее.

### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы объемом 155 наименований. Рукопись содержит 179 страниц, включая 37 рисунков и 5 таблиц.

### **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обосновывается актуальность выбранной темы, формулируется цель и основные задачи исследования, отмечается научная новизна и практическая значимость работы, приводятся основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** состоит из четырех подразделов, в первом из которых дается представление о грибовидных течениях и их параметрах, получаемое с помощью спутниковой информации. Показано, что данные дипольные структуры являются часто встречаемой и неотъемлемой частью динамики вод, проявляющейся в разных частях Мирового океана. Из анализа имеющихся спутниковых изображений морской поверхности приводятся пространственные масштабы выявленных грибовидных течений, а также динамические

характеристики и закономерности их эволюции. На примере Черного моря показаны размеры грибовидных течений и ареалы их формирования.

Во втором подразделе приводится информация о параметрах дипольных структур в океане, полученная на основе контактных наблюдений. Показано, что исследования грибовидных течений с помощью контактных методов достаточно редки, и это в первую очередь связано с трудностями проведения синхронных или квазисинхронных пространственных наблюдений за океанологическими характеристиками. Грибовидные течения малых масштабов из-за нестационарности, малого времени жизни и спонтанности появления наиболее трудно изучать контактными методами. Наиболее исследованными и описанными остаются мезомасштабные дипольные вихревые образования.

В третьем подразделе дается анализ имеющейся на сегодняшний день информации об экспериментальном моделировании дипольных вихревых структур. Обобщаются сведения по лабораторным установкам и методикам проведения экспериментов, как в однородной, так и стратифицированной жидкости. Показано, что в ходе экспериментальных исследований была получена качественная и количественная информация о дипольных вихревых структурах и выявлены этапы их эволюционирования.

В четвертом подразделе обсуждается проблема математического моделирования дипольных структур. Дается обзор существующих моделей и подходов в моделировании такого рода динамических образований. Несмотря на представленное многообразие математических моделей, они не освещают полностью проблему генерации грибовидных течений и не предоставляют исчерпывающих выводов о механизмах их формирования.

**Во второй главе** дается описание экспериментов, проводимых автором на лабораторной установке по формированию грибовидных течений при горизонтальном инжектировании струи в однородную по плотности жидкость. Показано, что сферический вихрь на конце испускаемой струи из сопла круглого сечения формируется как при условии задания «твердой крышки», так и при наличии свободной поверхности. Эксперименты, воспроизводящие условие «твердой крышки» показали, что грибовидные течения могут формироваться и в таких условиях, что важно при математическом описании механизмов их генерации. Это означает, что перекося уровня не является необходимым условием для образования динамических структур дипольного

типа, и математическая модель такого плана, как в работе (Воропаев и Неелов, 1991), описывает только частный случай развития подобных структур.

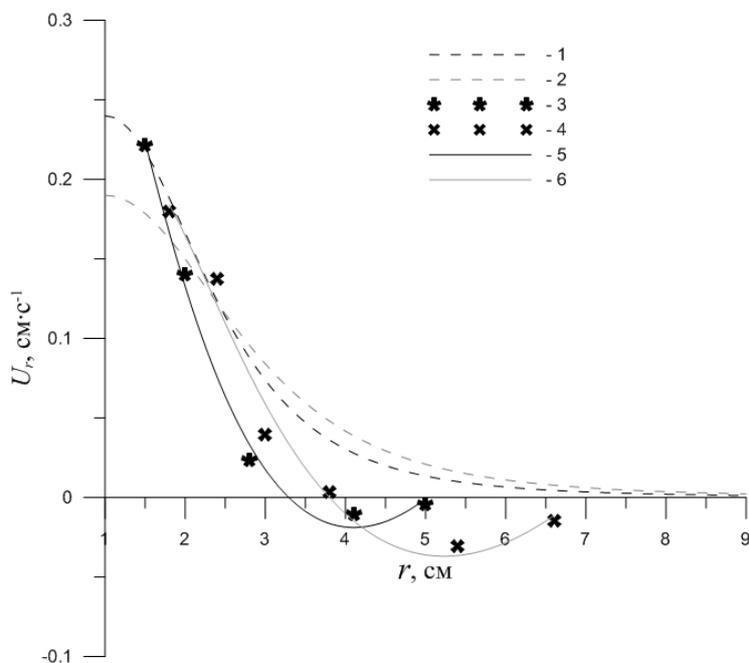
Описаны методы обработки видео- и фотоматериала, полученного в ходе проведения экспериментов. В процессе обработки экспериментальных данных была получена информация о распределении как продольной, так и поперечной составляющих скорости на разных участках грибовидного течения, и об эволюции пространственных размеров дипольной структуры. В том числе были определены такие геометрические характеристики как: положение фронтальной области, ширина струи, поперечный размер вихря, положение критических (фокусных) точек в горизонтальной плоскости.

При анализе экспериментального материала был сделан акцент на условия формирования грибовидных течений в зависимости от числа Рейнольдса ( $Re$ ). Рассмотрены возможные варианты представления  $Re$  и их величины при описании дипольных вихревых структур, как при длительном действии источника импульса, так и кратковременном. Были рассчитаны числа Рейнольдса в инжектируемой струе для двух величин диаметра сопла нескольких серий экспериментов при длительном действии источника импульса. В результате выделено три динамических режима в зависимости от сочетания величин  $Re$ , диаметра сопла и скорости испускаемой из сопла струи: режим грибовидных течений, переходный и турбулентный режим. Было отмечено, что при большем диаметре сопла грибовидные течения могут генерироваться при больших величинах  $Re$ . Показано, что для каждого диаметра сопла можно получить диапазон чисел Рейнольдса, в котором обязательно формируются грибовидные течения. Грибовидные течения стабильно формировались в проведенных экспериментах при умеренных числах Рейнольдса порядка  $10^0 \div 10^2$ .

Приведена динамика изменений продольной составляющей скорости (рисунок 1) для двух моментов времени от начала действия источника импульса и при одной и той же его мощности, как из данных экспериментов, так и по асимптотическому приближению Шлихтига, описанному у Воропаева (1985). С увеличением времени происходит перераспределение скорости поперек оси течения в сторону увеличения значений скоростей, которое можно объяснить за счет замедления продвижения самой вихревой структуры.

На рисунке 1 можно проследить, что при удалении от оси струи за критическим (фокусными) точками продольная составляющая скорости на

переднем фронте струи, полученная по данным экспериментов (кривые 5 и 6), меняет знак, переходя в отрицательную область. Такая ситуация происходит за критическими точками, когда продольная компонента направлена в противоположную сторону от направления перемещения самой вихревой структуры и начинает превосходить ее по абсолютной величине.



$t = 60$  с: 1 – (по Шлихтингу), 3 – экспериментальные данные,  
5 – аппроксимация экспериментальных данных

$t = 120$  с: 2 – (по Шлихтингу), 4 – экспериментальные данные,  
6 – аппроксимация экспериментальных данных

Рисунок 1 – Теоретическое и экспериментальное распределение составляющей скорости  $U$  поперек струи по оси  $Y$ , проходящей через фокусные критические точки для двух моментов времени

Полученное в представляемом исследовании в ходе экспериментов смещение продольной компоненты скорости в область отрицательных значений не противоречит теоретическим выводам, полученными Станевэй с соавторами (Stanaway, 1988) для вихревого ринга. Также получена оценка изменения положения фронтальной области с течением времени для различных величин безразмерной интенсивности источника импульса  $I/\rho v^2$ . Проведено сравнение с распределением положения фронтальной области из экспериментов и из зависимости, полученной в работе Воропаева и Филиппова (1985). Регрессионный анализ экспериментальных данных показал, что во всех опытах

зависимость длины струи от времени имеет степенной вид:  $X \sim t^\alpha$ . Для малых величин чисел Рейнольдса среднее по всем опытам значение  $\alpha$  составляет  $0.5 \pm 0.04$ , что не противоречит выводам в исследовании Воропаева и Филиппова. Однако с увеличением интенсивности источника  $\alpha$  уменьшается, и зависимость стремится к виду  $t^{1/3}$ .

**Третья глава** посвящена описанию влияния несимметричности тензора напряжений на формирование грибовидного течения. Практически, начиная с самого начала развития теории упругости сплошных сред и классической гидродинамики, в экспериментальных исследованиях отмечаются некоторые несоответствия разработанной теории, проявляющиеся в различных эффектах. Так наблюдаются отличия от классической теории в исследованиях изменений вязкости жидкости, коэффициентов трения и других поверхностных эффектов. Эти явления обычно имеют место при больших градиентах скоростей. Показано, что в случае значительных величин градиентов скорости потока вязкая жидкость проявляет свойство упругости, и вязкость становится переменной величиной. Так для учета переменной вязкости академик Яненко (Яненко, 1984) при описании течения со значительным сдвигом скорости ввел обобщенный тензор напряжений, являющийся несимметричным. Несимметричность тензора в данном случае обуславливалась нелинейностью тензора деформаций.

Отмечено, что в последние годы активно развивается теория упругости сплошных сред, которую принято называть моментной теорией упругости, учитывающей моментное (вращательное) взаимодействие частиц. Эта теория была предложена Коссера в первые годы 20 столетия и развита в середине прошлого века. Возникающие отличия от классической механики сплошной среды тесно связаны с предположениями, лежащими в основе ньютоновской механики и рассматривающими частицу среды как материальную точку, а не как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру вязкого вещества. Классическая теория упругости описывает свойства тел, у которых между частицами действуют центральные силы. Она основывается на постулате, в котором связь нагрузок между двумя сторонами малого поверхностного элемента описывается исключительно главным вектором сил. Это приводит к симметричному напряженному и деформированному состоянию. Но теория симметричной упругости не описывает с необходимой точностью явления, происходящие в

несжимаемой жидкости. Возникающие несоответствия можно исправить путем дополнительных предположений о передаче нагрузок через элемент поверхности не только главным вектором сил, но и главным моментом. Можно сказать, что в рассматриваемой жидкой среде частицы обладают как трансляционными, так и вращательными степенями свободы. Предположение появления дополнительных напряжений в элементарном объеме приводит к несимметричности тензора напряжений.

Обосновано, что с учетом несимметричности определяющее уравнение в тензорном виде для поверхностных напряжений (Новацкий, 1975), записывается как:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\sigma_{ij}^S + 2\alpha\sigma_{ij}^A + \lambda\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}^S$ ,  $\sigma_{ij}^A$  – симметричная и антисимметричная части тензора напряжений,  $\alpha$  – коэффициент сдвига или деформации,  $\delta_{ij}$  –  $\delta$ -функция Кронекера;  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты вязкости.

Симметричная часть тензора поверхностных напряжений соответствует симметричному тензору напряжений классической механики жидкости, а антисимметричная часть тензора содержит элемент кручения (Новацкий, 1975):

$$\sigma_{ij}^A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \epsilon_{ijk} \omega_k, \quad (2)$$

где  $\epsilon_{ijk}$  – единичный тензор третьего ранга Леви-Чивита,  $\omega_k$  – составляющая вектора угловой скорости вращения элементарного объема жидкости.

$$\omega = \frac{1}{2} \mathbf{rot} V - \gamma. \quad (3)$$

Такое предположение принято также и в работе (Виноградов, Ерофеев, 2009).

Показано, что изменение угловой скорости жидкости при вращательном движении за счет деформирующего воздействия нецентрального распределения масс позволяет представить составляющие угловой скорости как:

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left[ (1-b) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - (1+b) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right], \quad (4)$$

где  $b$  – постоянный коэффициент или коэффициент пропорциональности скорости деформации. Геометрическая интерпретация полученных скоростей кручения представлена на рисунке 2.

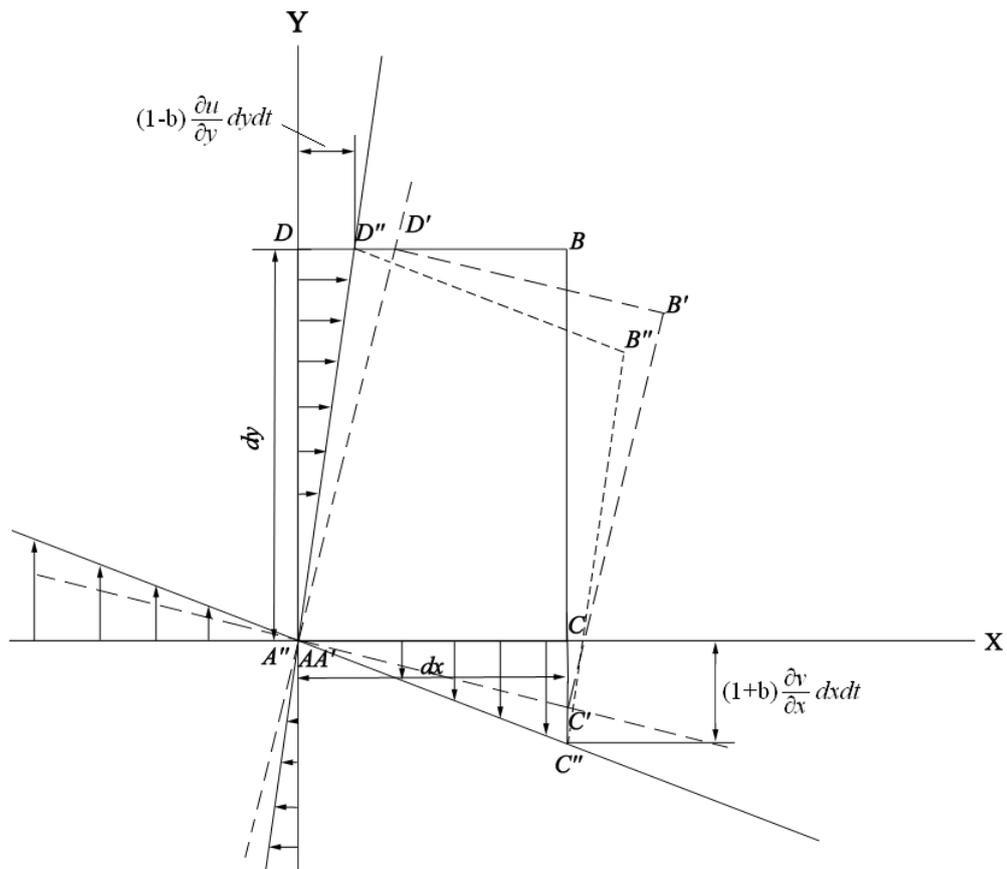


Рисунок 2 – Локальная деформация объема жидкости, когда

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left[ (1-b) \frac{\partial u}{\partial y} - (1+b) \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

Хорошо видно, что, действительно, введенный добавочный член в уравнении (3) пропорционален скорости деформации элементарного объема несжимаемой жидкости. Тогда составляющие тензора напряжений (1) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \operatorname{div} V \\ \sigma_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \operatorname{div} V \\ \sigma_{33} = -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \operatorname{div} V \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \tau_{12} = (\mu + \alpha b) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \tau_{13} = (\mu - \alpha b) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{21} = (\mu - \alpha b) \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \tau_{23} = (\mu + \alpha b) \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \tau_{31} = (\mu + \alpha b) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right), \tau_{32} = (\mu - \alpha b) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Для вывода основных дифференциальных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, как и в классической механике жидкости, используем уравнение динамики сплошных сред в напряжениях. В случае изотермического движения, когда  $\rho = const$  и  $\mu = const$ , получена система основных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости с учетом несимметричности тензора напряжений. Полученная система уравнений несимметричной механики сплошных сред представляет собой нелинейную систему уравнений в частных производных второго порядка, отличную от уравнений Навье-Стокса, которая в случае  $b \rightarrow 0$  переходит в систему уравнений Навье-Стокса классической гидродинамики. Было показано качественное отличие полученной системы уравнений от системы уравнений Навье-Стокса, и для анализа значимости появившихся в уравнениях движения членов, имеющих смешанные производные, выполнено обезразмеривание этой системы уравнений.

Для численного исследования формирования грибовидного течения было осуществлено осреднение модифицированных уравнений движения Навье-Стокса. Добавившиеся в правых частях уравнений после осреднения члены представляют собой также производные от составляющих тензора напряжений, но для большего масштаба движения, соответствующего масштабу осреднения. Этот тензор показывает, что в осредненном потоке обмен количеством движения между объемами воды обуславливается как силами молекулярной вязкости, так и пульсациями скорости. Влияние последней аналогично молекулярной вязкости. К полученному тензору напряжений осредненного движения были применены те же предположения моментной или «несимметричной» теории, которые были использованы при представлении молекулярного тензора напряжений (1). В результате была выведена обобщенная система осредненных уравнений движения в приближении Рейнольдса:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \\
\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{K}_{12} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{K}_{13} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_{21} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\
\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{K}_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{K}_{23} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_{31} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \\
\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{K}_{32} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{K}_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}
\end{array} \right. , \quad (7)$$

где  $\tilde{K}_{ij}$  – коэффициенты обмена:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{11} &= 2(v + K_{11}), & \tilde{K}_{22} &= 2(v + K_{22}), & \tilde{K}_{33} &= 2(v + K_{33}), \\
\tilde{K}_{12} &= (v + K_{12}) + (\eta b + T_{12} R_3), & \tilde{K}_{13} &= (v + K_{13}) - (\eta b + T_{13} R_2), \\
\tilde{K}_{21} &= (v + K_{21}) - (\eta b + T_{21} R_3), & \tilde{K}_{23} &= (v + K_{23}) + (\eta b + T_{23} R_1), \\
\tilde{K}_{31} &= (v + K_{31}) + (\eta b + T_{31} R_2), & \tilde{K}_{32} &= (v + K_{32}) - (\eta b + T_{32} R_1).
\end{aligned} \quad (8)$$

где  $K_{ij}$ ,  $T_{ij}$ , – коэффициенты эффективной вязкости и деформации,  $R_k$  – коэффициент, аналогичный коэффициенту  $b$  в (4),  $v = \mu/\rho$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\eta = \alpha/\rho$  – кинематический коэффициент деформации или сдвига, который имеет ту же размерность, что и  $v$ .

В этих коэффициентах обмена виден баланс между молекулярными свойствами движения жидкости и осредненными. В связи с этим были подразделены все режимы движения на три категории, для каждой из которых коэффициенты (8) приобретают соответствующий вид. Как только масштаб движения становится достаточно большим и превышающим молекулярные взаимодействия и, полагая, что значения коэффициентов  $K_{ij}$  и  $T_{ij}$ , если не равны, то, по крайней мере, пропорциональны, поскольку оба имеют одинаковую размерность, коэффициенты обмена тогда приобретают вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{11} &= 2K_{11}, & \tilde{K}_{22} &= 2K_{22}, & \tilde{K}_{33} &= 2K_{33}, \\
\tilde{K}_{12} &= K_{12}(1 + B_{12}), & \tilde{K}_{13} &= K_{13}(1 - B_{13}), \\
\tilde{K}_{21} &= K_{21}(1 - B_{21}), & \tilde{K}_{23} &= K_{23}(1 + B_{23}), \\
\tilde{K}_{31} &= K_{31}(1 + B_{31}), & \tilde{K}_{32} &= K_{32}(1 - B_{32}), \\
B_{12} &= \beta_{12} \cdot R_3, & B_{21} &= \beta_{21} \cdot R_3, \\
B_{13} &= \beta_{13} \cdot R_2, & B_{31} &= \beta_{31} \cdot R_2, \\
B_{23} &= \beta_{23} \cdot R_1, & B_{32} &= \beta_{32} \cdot R_1,
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $\beta_{ij} = T_{ij}/K_{ij}$  – коэффициент пропорциональности.

Показано, что переход от одного масштаба к другому имеет достаточно условное значение. В основном это связано с масштабом пространственного осреднения и интенсивностью рассматриваемых потоков.

Была произведена параметризация коэффициентов, опираясь на хорошо выраженную анизотропию в динамической структуре инжектируемой жидкости. Объяснено, что характер лобового и касательного обмена импульсом должен существенно отличаться как по величине, так и по внутренней структуре. Показано, что коэффициент нормального обмена импульсом можно представить в виде:

$$\tilde{K}_{ii} = \frac{U_{\text{ист}}^2 - v_i^2}{\delta + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}}, \tag{10}$$

где  $\delta$  – постоянная величина, обеспечивающая ограничение максимального значения коэффициента нормального обмена,  $U_{\text{ист}}$  – скорость в источнике импульса. Проанализирован характер изменчивости  $\tilde{K}_{ii}$  в зависимости от изменения скорости струйного течения и продольного градиента скорости в этом течении при различной интенсивности источника импульса.

Представлен вид коэффициента касательного обмена импульсом  $\tilde{K}_{ij}$ , имеющего более сложную структуру, поскольку он должен обеспечивать нелинейное взаимодействие струйного потока с окружающей водной средой:

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{L_*^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2}{v_i + \delta_1} \cdot \left[ 1 \pm \frac{2}{\pi} \arctg \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \cdot Re^{-1} \right]. \tag{11}$$

где  $L^*$  – пространственный масштаб,  $\delta_1$  – постоянная величина, обеспечивающая ограничения максимального значения коэффициента  $K_{ij}$ .

Была показана зависимость изменения коэффициента обмена импульсом  $\tilde{K}_{ij}$  от скорости потока, ортогонального градиента продольной составляющей скорости  $\partial v_i / \partial x_j$  и градиента ортогональной составляющей скорости  $\partial v_j / \partial x_j$  для различных величин чисел Рейнольдса. При  $Re$  более  $10^2$  коэффициенты касательного обмена импульсом представляют уже составляющие не несимметричного тензора напряжений, а напряжений классической гидродинамики. Так при  $Re = 1000$  разность между максимальными значениями  $\tilde{K}_{ij}$  для градиентов  $\partial v_j / \partial x_j$  противоположного знака не превышает 1%, что позволяет рассматривать коэффициент  $\tilde{K}_{ij}$ , как универсальную функцию обмена импульсом при различных режимах движения, описываемого как классической теорией гидродинамики, так и несимметричной.

При сравнении коэффициентов нормального и касательного обмена импульсом отмечено, что основную роль в динамике струйного потока и формирования упорядоченных динамических систем играет  $\tilde{K}_{ij}$ . Даже при малой интенсивности источника импульса ( $Re = 1 \div 10$ ) коэффициент  $\tilde{K}_{ij}$  на порядок превышает величину коэффициента  $\tilde{K}_{ii}$ . Причем это влияние в большей степени проявляется во фронтальной области струйного течения, где скорость движения потока резко снижается, а градиенты скорости еще сохраняются значительными.

**В четвертой главе** приводится описание модели формирования грибовидного течения на притопленной струе в однородной жидкости и его численная реализация. В основе этой модели лежит модифицированная система осредненных уравнений движения, полученная из теоретических предположений несимметричной гидродинамики (7) и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad (12)$$

Давление в уравнениях движения взято без учета статического давления и нормировано на плотность воды, что оправдано при рассмотрении движения в

однородной жидкости. Распределение давления в моделируемой области восстанавливается с помощью уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = \operatorname{div} \vec{\Phi}, \quad (13)$$

где  $\vec{\Phi}$  представляет собой комплекс из перенесенных в правую часть нелинейных адвективных членов, объединенных с диффузионными членами уравнения движения в одну функцию.

На боковых жидких границах задавалось свободное протекание. На нижней твердой границе задавалось условие непротекания и скольжения. На свободной поверхности задавалось условие твердой крышки. Что касается давления, то для него на боковой границе задавался нулевой градиент. На твердой нижней и свободной верхней поверхности давление рассчитывалось по двум составляющим скорости в плоскости  $X$ - $Y$ , т.е. распределение давления определялось на основе двумерного уравнения Пуассона.

За начальные условия принимается полное отсутствие движения в моделируемой области. В момент времени  $t = 0$  в направлении оси  $X$  начинает непрерывно действовать источник импульса, который располагается равноудалено от границ моделируемой области в однородной неподвижной воде. Выбранные условия являются наиболее простыми для анализа формирования грибовидного течения и редко встречаемыми в естественных условиях открытого океана, но для проверки выдвигаемого предположения о влиянии несимметричности тензора напряжений на формирование грибовидного течения это вполне допустимо.

Была осуществлена численная реализация данной модели. Метод конечных объемов (МКО) использовался для аппроксимации пространственных производных первого и второго порядка, а схема верхней релаксации – для аппроксимации производных по времени. Решение уравнения Пуассона основывалось на комбинировании разностных аппроксимаций уравнений движения. Приведена общая схема расчета параметров модели.

Произведена верификация модели. Проверка адекватности и точности решения модели проводилась при выполнении численных экспериментов. Результаты численного решения сравнивались с теоретическими и экспериментальными данными, полученными из литературных источников и проведенных лабораторных экспериментов. Показано, что модель достаточно

хорошо воспроизводит распределение продольной составляющей скорости  $U$  в грибовидном течении при его развитии во времени. Причем, необходимо отметить, что наиболее точно модель воспроизводит распределение  $U$  на начальных стадиях развития вихревого диполя. На стадии полностью сформировавшегося диполя ( $t = 120$  с) наблюдаются некоторые расхождения в характеристиках, полученных по модели и из лабораторных экспериментов. Данные несоответствия связаны либо с выбором размера пространственной дискретизации уравнений модели, или с параметризацией коэффициентов касательного обмена импульсом. В целом модель успешно воспроизводит распределение продольной составляющей скорости течения по всей расчетной области. Было также продемонстрировано, что распределение поперечной составляющей в плоскости  $X$ - $Y$ , полученной в результате численного расчета, отвечает представлениям формирования грибовидного течения.

Для визуализации вихревой (грибовидной) структуры струйного течения после расчета распределения составляющих скорости течения производился расчет распространения пассивных маркеров, перемещающихся в формируемой динамической системе (рис.3). Прослежена временная эволюция грибовидного течения. Показано, что увеличение размеров его головной (фронтальной) части хорошо согласуется с асимптотическими решениями.

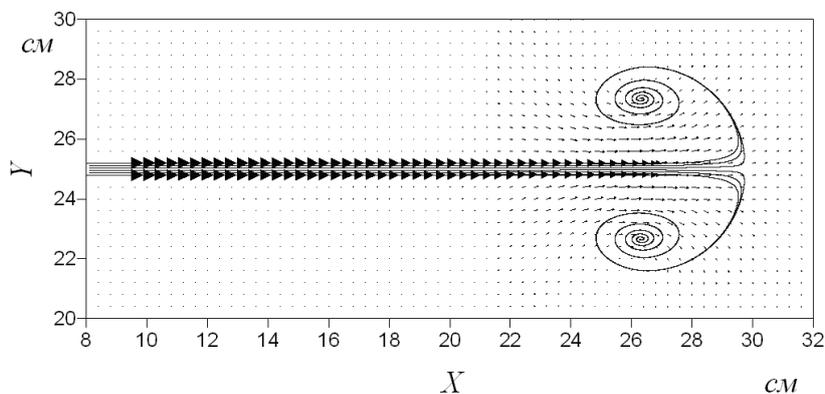


Рисунок 3 – Модельное распределение пассивных маркеров скорости течения в расчетной области на плоскости  $X$ - $Y$  при  $t = 120$  с

Для сравнения результатов модельных расчетов с оценками эволюции грибовидного течения в океане на результаты моделирования были наложены характерные масштабы такого течения, формируемого в естественных условиях открытого океана. Полученные оценки соответствуют общим представлениям о соотношении размеров и скорости в грибовидном течении, а также их

временной динамики в открытом море. Таким образом, было показано, что численная модель, построенная на основе несимметричного тензора поверхностных напряжений, способна воспроизводить упорядоченные динамические структуры в жидкой среде, такие как грибовидные течения.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы.

Была создана лабораторная установка для исследования формирования грибовидных течений. С помощью этой установки была произведена серия экспериментов при горизонтальном ижектировании струи в однородной по плотности жидкости.

Были получены характеристики эволюции грибовидных течений в лабораторных условиях при различных величинах числа Рейнольдса источника импульса. В ходе анализа серии экспериментов было выделено три динамических режима для струи, вытекающей из сопла. Было показано, как диаметр сопла источника импульса влияет на динамический режим инжектируемой струи и на величины числа Рейнольдса, при которых генерируется сферический вихрь на фронте струи. Было показано, что для каждого диаметра сопла можно получить диапазон чисел Рейнольдса, в котором обязательно формируются грибовидные течения.

Информация о характеристиках грибовидных течений, полученная экспериментальным путем, была использована при параметризации коэффициентов обмена и при верификации результатов численного моделирования грибовидного течения.

В результате были получены следующие основные выводы:

1) Рассмотрена возможность описания тензора поверхностных напряжений, как несимметричного, за счет деформации элементарного объема жидкости в результате вращения на основе моментной теории упругости. Показано, что изменение угловой скорости жидкости при вращательном движении за счет деформирующего воздействия нецентрального распределения масс позволяет ввести коэффициент пропорциональности скорости деформации –  $b$ . В случае стремления коэффициента  $b$  к нулю, несимметричный тензор поверхностных напряжений переходит в симметричный тензор напряжений.

2) Выполнена модернизация уравнений движения Навье-Стокса с учетом несимметричности тензора поверхностных напряжений. Появление дополнительных членов в правой части уравнений движения, представленных смешанными производными второго порядка от поперечных составляющих

скорости движения, демонстрирует более тесную связь между проекциями вектора течения на оси ортогональной системы координат. Полученная система уравнений движения легко переходит в систему уравнений Навье-Стокса классической гидродинамики при равенстве коэффициента  $b$  нулю.

3) Произведено осреднение уравнений движения с учетом несимметричности тензора поверхностных напряжений. Коэффициенты обмена, полученные в результате осреднения, содержат как молекулярные вязкие, так и осредненные составляющие. В зависимости от масштабов динамических процессов, коэффициенты обмена приобретают тот, или иной вид.

4) Выполнена параметризация коэффициентов обмена импульсом. Рассмотрены отдельно возможные способы описания нормального  $\tilde{K}_{ii}$  и касательного  $\tilde{K}_{ij}$  коэффициентов обмена, основанных на анализе осредненного течения. Показано, что при числах Рейнольдса более  $10^2$  коэффициент касательного обмена импульсом соответствует уже не несимметричной механике жидкости, а классической гидродинамике. Основную роль в динамике струйного потока и формирования упорядоченных динамических систем играет  $\tilde{K}_{ij}$ , поскольку даже при малой интенсивности источника импульса он на порядок превышает величину коэффициента  $\tilde{K}_{ii}$ .

5) Разработана математическая модель воспроизведения грибовидного течения в однородной жидкости. В основе этой модели лежит модифицированная система осредненных уравнений движения, полученная из теоретических предположений несимметричной гидродинамики. При численной реализации данной модели использовался метод конечных объемов для аппроксимации пространственных производных, а схема верхней релаксации – для аппроксимации производных по времени. Метод конечных объемов обеспечил консервативность численной схемы.

6) Выполнено численное воспроизведение грибовидного течения и верификация модели. Так был численно симитирован случай образования грибовидного течения, как и в одном из лабораторных экспериментов. Для визуализации вихревой структуры на фронте струйного течения после расчета распределения составляющих скорости течения был произведен расчет распространения пассивных маркеров, перемещающихся в формируемой

динамической системе. Полученные незначительные отклонения от экспериментальных распределений составляющих скорости в грибовидном течении могут быть связаны как с выбором пространственной дискретизации параметров модели, так и с особенностями параметризации коэффициентов обмена импульсом в уравнениях движения. В целом результаты численного моделирования соответствуют общим представлениям о соотношении размеров и скорости в грибовидном течении. Сопоставление результатов численного решения с теоретическими и экспериментальными данными, полученными из литературных источников и проведенных лабораторных экспериментов, позволяет сделать вывод о хорошей работоспособности разработанной модели и возможности на ее основе получать адекватную информацию о характеристиках дипольных вихревых структур.

Таким образом, на основании вышеизложенных основных результатов представляемой работы, показано, что цель исследования была достигнута, а его основные задачи выполнены.

### **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

В рецензируемых журналах из списка ВАК:

1. Карлин Л.Н., **Даньшина А.В.** Экспериментальные исследования течений дипольного типа при условии твердой крышки // Ученые записки РГГМУ, изд. РГГМУ, 2008, № 7, С. 74–80.

2. Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю., Исаев А.В., Хаймина О.В., **Даньшина А.В.** Особенности динамической структуры вод прибрежной зоны Туапсе // Ученые записки РГГМУ, изд. РГГМУ, 2010, № 11, С. 113–123.

3. Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю., **Даньшина А.В.** Выявление пространственных взаимосвязей динамического режима приземного слоя атмосферы на территории Туапсе // Ученые записки РГГМУ, изд. РГГМУ, 2010, № 11, С. 23–31.

4. **Даньшина А.В.**, Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю. Несимметричность напряжений вязкой несжимаемой жидкости // Ученые записки РГГМУ, изд. РГГМУ, 2011, № 20, С. 156–166.

Остальные публикации:

5. Даньшина А.В., Карлин Л.Н. Натурные исследования изменчивости термодинамической структуры приповерхностного слоя / Материалы итоговой сессия Ученого совета / С-Пб.: изд. РГГМИ, 1997, С.81–82.

6. Chantsev V., Danshina A. Modelo Bidimensional simple para el desarrollo de una corriente de tipo Dipolar en un líquido homogéneo en la región ecuatorial del océano. // Boletín Científico CCCP, No. 7, Bogota, 1998, pp. 20–25.

7. Даньшина А.В., Карлин Л.Н. Моделирование динамической структуры приповерхностного слоя океана // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Сб. трудов, изд. СПбГАСУ, 1998, вып. 4, С. 56–62.

8. Карлин Л.Н., Даньшина А.В. Экспериментальное исследование изменчивости интенсивности турбулентного обмена в Финском заливе в июле 1997г. / Материалы итоговой сессии Ученого совета / СПб.: изд. РГГМУ, 1998, С. 105–107.

9. Даньшина А.В. Численное моделирование формирования течений дипольного типа в прибрежных районах моря / Итоговая сессия Ученого Совета. Тезисы докладов / СПб.: изд. РГГМУ, 1999, С. 88–89.

10. Даньшина А.В., Чанцев В.Ю. Двумерная модель грибовидного течения в однородной жидкости // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Сб. трудов, изд. СПбГАСУ, 1999, вып. 5, С. 32–37.

11. Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю., Хаймина О.В., Даньшина А.В., Исаев А.В. Получение репрезентативной информации для разработки методов проведения экологического мониторинга / Материалы научно-практической конференции грантодержателей конкурса РФФИ и администрации Краснодарского края «Юг России», Анапа, 2009, С. 81–83.

12. Карлин Л.Н., Чанцев В.Ю., Хаймина О.В., Даньшина А.В., Исаев А.В. Разработка научного подхода к организации системы контроля окружающей среды прибрежной зоны Краснодарского причерноморья / Материалы научно-практической конференции грантодержателей конкурса РФФИ и администрации Краснодарского края «Юг России», Анапа, 2010, С. 56–58.

