

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики и теоретической механики

Рабочая программа по дисциплине

**МАТЕМАТИКА**

Основная профессиональная образовательная программа  
высшего образования программы бакалавриата по направлению подготовки

**05.03.05 Прикладная гидрометеорология**

Направленность (профиль):  
**Прикладная гидрология**

Квалификация:  
**Бакалавр**

Форма обучения  
**Очная/Заочная**

Согласовано  
Руководитель ОПОП  
«Прикладная гидрология»

  
Сакович В.М.

Утверждаю  
Председатель УМС  И.И. Палкин

Рекомендована решением  
Учебно-методического совета  
11 июня 2019 г., протокол № 7

Рассмотрена и утверждена на заседании кафедры  
«21» мая 2019 г., протокол № 10

Зав. кафедрой  Матвеев Ю.Л.

Автор-разработчик:

  
Денисов В.В.

## 1. Цели освоения дисциплины

**Цель дисциплины** – подготовка бакалавров, владеющих знаниями в объеме, необходимом для изучения специальных дисциплин.

**Основные задачи дисциплины** связаны с развитием логического и алгоритмического мышления, с освоением студентами:

- основных методов дисциплины «Математика»;
- основных методов решения задач дисциплины «Математика»;
- навыков решения практических задач дисциплины «Математика».

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Математика» для направления подготовки 05.03.05 – Прикладная гидрометеорология, профиль – Прикладная гидрология, относится к дисциплинам базовой части Блока 1. Дисциплины (модули).

Для освоения данной дисциплины, обучающиеся должны освоить математические дисциплины среднего общего образования.

Параллельно с дисциплиной «Математика» изучаются дисциплины: «История России», «Всеобщая история» «Иностранный язык», «Правоведение», «Информатика», «Физика», «Физика атмосферы», «Физика вод суши», «Физика океана», «Электротехника и электроника», «Методы и средства гидрометеорологических измерений», «Безопасность жизнедеятельности», «Теоретическая механика», «Гидромеханика», «Физическая культура и спорт» и другие.

Дисциплина «Математика» является базовой для освоения дисциплин «Численные методы математического моделирования», «Гидрологические прогнозы» и других профессиональных дисциплин.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Код компетенции	Компетенция
ОПК-1	способность представить современную картину мира на основе знаний основных положений, законов и методов естественных наук, физики и математики

В результате освоения компетенций в рамках дисциплины «Математика» обучающийся должен

### **Знать:**

- основные понятия дисциплины «Математика»;
- основные методы дисциплины «Математика»;
- основные методы применения дисциплины «Математика» к решению практических задач

### **Уметь:**

- решать практические задачи математическими методами;

### **Владеть:**

- перспективными математическими методами решения практических задач.

Основные признаки проявленности формируемых компетенций в результате освоения дисциплины «Математика» сведены в таблице.

**Соответствие уровней освоения компетенции планируемым результатам обучения и критериям их оценивания**

Этап (уровень) освоения компетенции	Основные признаки проявленности компетенции (дескрипторное описание уровня)				
	1.	2.	3.	4.	5.
минимальный	не владеет	слабо ориентируется в терминологии и содержании дисциплины «Математика»	Способен выделить основные идеи текста, работает с критической литературой дисциплины «Математика»	Владеет основными навыками работы с источниками и критической литературой дисциплины «Математика»	Способен дать собственную критическую оценку изучаемого материала дисциплины «Дополнительные главы математики»
	не умеет	не выделяет основные идеи дисциплины «Математика»	Способен показать основную идею в развитии дисциплины «Математика»	Способен представить ключевую проблему в ее связи с другими процессами дисциплины «Математика»	Может соотнести основные идеи с современными проблемами дисциплины «Математика»
	не знает	допускает грубые ошибки в дисциплине «Математика»	Знает основные рабочие категории, однако не ориентируется в специфике дисциплины «Математика»	Понимает специфику основных рабочих категорий дисциплины «Математика»	Способен выделить характерный авторский подход дисциплины «Математика»
базовый	не владеет	плохо ориентируется в терминологии и содержании дисциплины «Математика»	Владеет приемами поиска и систематизации, но не способен свободно изложить материал дисциплины «Математика»	Свободно излагает материал, однако не демонстрирует навыков сравнения основных идей и концепций дисциплины «Математика»	Способен сравнивать концепции, аргументированно излагает материал дисциплины «Математика»
	не умеет	выделяет основные идеи, но не видит проблем дисциплины «Математика»	Выделяет конкретную проблему, однако излишне упрощает ее в рамках дисциплины «Математика»	Способен выделить и сравнить концепции, но испытывает сложности с их практической привязкой к дисциплине «Математика»	Аргументированно проводит сравнение концепций по заданной проблематике дисциплины «Математика»
	не знает	допускает много ошибок в рамках дисциплины «Математика»	Может изложить основные рабочие категории дисциплины «Математика»	Знает основные отличия концепций в заданной проблемной области дисциплины «Математика»	Способен выделить специфику концепций в заданной проблемной области дисциплины «Математика»
продвинутый	не владеет	ориентируется в терминологии и содержании дисциплины «Математика»	В общих чертах понимает основную идею, однако плохо связывает ее с существующей проблематикой дисциплины «Математика»	Видит источники современных проблем в заданной области анализа, владеет подходами к их решению в рамках дисциплины «Математика»	Способен грамотно обосновать собственную позицию относительно решения современных проблем в заданной области дисциплины «Математика»

Этап (уровень) освоения компетенции	Основные признаки проявленности компетенции (дескрипторное описание уровня)				
	1.	2.	3.	4.	5.
не умеет	выделяет основные идеи, но не видит их в развитии дисциплины «Математика»	Может понять практическое назначение основной идеи, но затрудняется выявить ее основания в рамках дисциплины «Математика»	Выявляет основания заданной области анализа, понимает ее практическую ценность, однако испытывает затруднения в описании сложных объектов анализа дисциплины «Математика»	Свободно ориентируется в заданной области анализа. Понимает ее основания и умеет выделить практическое значение заданной области дисциплины «Математика»	
не знает	допускает ошибки при выделении рабочей области анализа дисциплины «Математика»	Способен изложить основное содержание современных научных идей в рабочей области анализа дисциплины «Математика»	Знает основное содержание современных научных идей в рабочей области анализа, способен их сопоставить в рамках дисциплины «Математика»	Может дать критический анализ современным проблемам в заданной области анализа дисциплины «Математика»	

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины – 14 зачетных единиц, 504 часа

*Объем дисциплины (модуля) по видам учебных занятий  
в академических часах)*

Объём дисциплины	Всего часов	
	Очная форма обучения	Заочная форма обучения
<b>Общая трудоёмкость дисциплины</b>	504	504
<b>Контактная работа обучающихся с преподавателям – всего:</b>	196	56
в том числе:		
лекции	98	28
практические занятия	98	28
<b>Самостоятельная работа</b>	308	448
<b>Вид промежуточной аттестации (экзамен, зачет)</b>	<b>Экзамен</b>	<b>Экзамен</b>

#### 4.1. Структура дисциплины

##### Очная форма обучения

№ п/п	Раздел и тема дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.				Формы текущего контроля успеваемости	Занятия в активной и интерактивной форме, час.	Формируемые компетенции
			Лекции	Семинар, практич.	Лаборат.	Самост. работа			
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	1	28	28	–	88	Опрос, экзамен	14	ОПК-1
	<b>ИТОГО</b>	1	<b>28</b>	<b>28</b>	–	<b>88</b>		14	
2	Дифференциальные и интегральные исчисления функции одной переменной	2	28	28	–	88	Опрос, экзамен	10	ОПК-1
	<b>ИТОГО</b>	2	<b>28</b>	<b>28</b>	–	<b>88</b>		10	
3	Дифференциальные и интегральные исчисления функции многих переменных, ряды	3	28	28	–	88	Опрос, экзамен	10	ОПК-1
	<b>ИТОГО</b>	3	<b>28</b>	<b>28</b>	–	<b>88</b>		10	
4	Математическая физика	4	14	14	–	44	Опрос, зачет	10	ОПК-1
	<b>ИТОГО</b>	4	<b>14</b>	<b>14</b>	–	<b>44</b>		10	

№ п/п	Раздел и тема дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.				Формы текущего контроля успеваемости	Занятия в активной и интерактивной форме, час.	Формируемые компетенции
			Лекции	Семинар, практич.	Лаборат.	Самост. работа			
	<b>ВСЕГО</b>		<b>98</b>	<b>98</b>	<b>–</b>	<b>308</b>			

#### Заочная форма обучения

№ п/п	Раздел и тема дисциплины	Курс	Виды учебной работы, в т.ч. самостоятельная работа студентов, час.				Формы текущего контроля успеваемости	Занятия в активной и интерактивной форме, час.	Формируемые компетенции
			Лекции	Семинар, практич.	Лаборат.	Самост. работа			
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	1	6	6	–	112	Опрос экзамен	6	ОПК-1
2	Дифференциальные и интегральные исчисления функции одной переменной	1	8	8	–	112	Опрос экзамен		
	<b>ИТОГО</b>	<b>1</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>–</b>	<b>224</b>		<b>6</b>	
3	Дифференциальные и интегральные исчисления функции многих переменных, ряды	2	6	6	–	112	Опрос, зачет	4	
4	Математическая физика	2	8	8	–	112	Опрос экзамен		
	<b>ИТОГО</b>	<b>2</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>–</b>	<b>224</b>		<b>4</b>	
	<b>ВСЕГО</b>		<b>28</b>	<b>28</b>	<b>–</b>	<b>448</b>			

## 4.2. Содержание разделов дисциплины

### 4.2.1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Матрицы и определители. Системы линейных уравнений. Линейные пространства. Евклидовы и унитарные пространства. Линейные операторы в конечномерном пространстве. Квадратичные формы.

Прямоугольная система координат на плоскости. Расстояние между точками. Де-

ление отрезка в данном отношении. Векторы. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Общее уравнение прямой на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Преобразование координат точки при замене системы координат. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность векторов. Независимость попарно ортогональных векторов. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса. Матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы. Геометрическая интерпретация ортогональных матриц

Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции, их графики. Класс элементарных функций. Числовые последовательности, предел числовой последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Пределы монотонных функций. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функций в точке. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений. Равномерная непрерывность.

Бесконечно малые в точке функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых. Символы  $o$  и  $O$ . Эквивалентные бесконечно малые, таблица эквивалентных бесконечно малых

#### **4.2.2. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной**

Понятие функции, дифференцируемой в точке, дифференциал функции и его геометрический смысл. Общее представление о методах линеаризации. Производная функции, ее смысл в различных задачах. Правила нахождения производной и дифференциала. Таблица производных элементарных функций.

Формула производной произведения функций, производная частного, производная сложной функции.

Логарифмическая производная. Производная обратной функции. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Неявная функция и ее производная.

Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, их применение. Критерий постоянства функции на интервале. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Выпуклость. Необходимые и достаточные условия выпуклости в терминах второй производной. Точки перегиба.

Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Представление функций  $\exp(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^d$  по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора в вычислительной математике.

Асимптоты функций. Понятие об асимптотическом разложении.

Общая схема исследования функции и построения ее графика

Неопределенный интеграл

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов от элементарных функций. Методы интегрирования. Теорема о замене переменной под знаком неопределенного интеграла. Занесение множителя под знак дифференциала.

Интегрирование по частям. Примеры. Интегрирование простейших рациональных функций.

Теорема о разложении правильной рациональной дроби в сумму простых дробей. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций. Интегралы вида

$$\int R(\sqrt[p]{x}) dx, \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2+bx+c}}, \int \frac{dx}{x^p \sqrt{ax^r+b}}.$$

Тригонометрические замены в интегралах от иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование рациональных функций от функций  $\sin x$  и  $\cos x$ . Универсальная тригонометрическая замена.

Определенный интеграл.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл в смысле Римана, его свойства. Ограниченность подынтегральной функции как необходимое условие сходимости определенного интеграла. Теорема о среднем.

Определенный интеграл как функция переменного верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.

Замена переменной под знаком определенного интеграла. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы и их сходимость.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Применение определенного интеграла для вычисления площади криволинейной трапеции, длины дуги кривой в декартовых и полярных координатах, площади криволинейного сектора, заданного в полярной системе координат, объема и площади тела вращения.

Методы вычисления определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

### 4.2.3. Функция многих переменных; ряды

Пространство  $R^n$ . Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Производные и дифференциалы высших порядков.

Формулы Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Неявная функция. Условный экстремум.

Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций.

Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Методы исследования абсолютной сходимости рядов. Теоремы



сравнения. Признак Даламбера и радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши.

Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Условная сходимость ряда. Признак Лейбница.

Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость функциональной последовательности, ряда. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное дифференцирование функциональной последовательности, ряда.

Степенные ряды. Радиус сходимости. Непрерывность их суммы. Почленное дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

#### 4.2.4. Математическая физика

Дифференциальные уравнения в частных производных, их порядок. Решение дифференциального уравнения. Уравнение колебания струны. Уравнение колебания мембраны. Уравнение теплопроводности. Задача Коши для уравнений различных типов. Класс корректности поставленной задачи.

Линейные дифференциальные уравнения с частными производными, их свойства. Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Замена переменных в дифференциальном уравнении второго порядка. Приведение уравнений различных типов к каноническому виду.

Общее решение волнового уравнения. Формула Д'Аламбера, ее частные случаи. Применение формулы Д'Аламбера к задаче с ограниченной и полуограниченной струной.

Метод Фурье. Задача Штурма-Лиувилля. Решение неоднородного волнового уравнения и волнового уравнения с неоднородными граничными условиями.

Метод Фурье для уравнения теплопроводности. Решение неоднородного уравнения теплопроводности и уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями. Уравнение теплопроводности для стержня бесконечной длины. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Уравнение Лапласа. Различные краевые задачи. Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле в круге методом Фурье. Формулы Грина. Потенциалы простого и двойного слоя. Метод функций Грина. Построение функций Грина. Задача Дирихле для полупространства и шара, для полуплоскости и круга. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле.

#### 4.3. Практические занятия, их содержание

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий	Форма проведения	Формируемые компетенции
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Матрицы и определители. Линейные и нелинейные операции над векторами. Предел функции.	Практические занятия	ОПК-1
2	Дифференциальные и интегральные исчисления функции одной переменной	Дифференцирование функций. Общая схема исследования функции. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.	Практические занятия	ОПК-1

3	Дифференциальные и интегральные исчисления функций многих переменных, ряды	Функции нескольких переменных. Дифференцирование функций. Последовательности и ряды.	Практические занятия	ОПК-1
4	Математическая физика	Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Уравнение теплопроводности.	Практические занятия	ОПК-1

**5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов и оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

**5.1. Текущий контроль**

Письменный контроль.

**а). Образцы тестовых и контрольных заданий текущего контроля**

Задание:

1. Вычислить определитель четвертого порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ -4 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

2. Выполнить указанные действия с матрицами.

$$A \cdot B - 4C^2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$$

4. Провести исследование функций и построить их графики:

$$y = x^3 - 3x$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 3}.$$

Задание:

$$1. \int \frac{(\arcsin x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$2. \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx,$$

Задание:

$$1. \text{ Исследовать на сходимость числовой ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}$$

$$2. \text{ Найти частные производные } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \text{ функции } u = z\sqrt{x^3} - ye^z.$$

Задание:

1. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка.

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_y - u = 0.$$

2. Решить однородное волновое уравнение с заданными начальными и граничными условиями.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}; \\ u(0, t) &= u_x(l, t) = 0; \\ u(x, 0) &= \sin \frac{\pi}{2l} x, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

3. Решить неоднородное волновое уравнение с заданными начальными и граничными условиями.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + (3x + 5)e^{-t}; \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

4. Решить однородное уравнение теплопроводности с заданными граничными и начальным условием

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}; \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0; \\ u(x, 0) &= 8x + 2. \end{aligned}$$

5. Решить уравнение теплопроводности с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}; \\ u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 2; \\ u(x, 0) &= 6x - 1. \end{aligned}$$

6. Решить уравнение Лапласа с заданными граничными условиями в декартовых координатах.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u(0, y) &= u_x(p, y) = 0, \\ u(x, 0) &= 3x + 1, u(x, s) = 0. \end{aligned}$$

7. Решить уравнение Лапласа с заданными граничными условиями в полярных координатах (в секторе круга).

$$\Delta u = 0,$$

$$u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0,$$

$$u(R, \varphi) = \varphi + 6.$$

## 5.2. Методические указания по организации самостоятельной работы

### Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля, а также для контроля самостоятельной работы обучающегося по отдельным разделам дисциплины

#### Тема 1. Определители, матрицы и системы линейных уравнений

1. Что такое линейное уравнение относительно неизвестных  $x$  и  $y$ ? Приведите примеры.
2. Какие из приведенных ниже записей представляют собой линейные уравнения относительно  $x$  и  $y$ ?
  - а)  $3x - y = 1$ .
  - б)  $2x = 5$ .
  - в)  $by = c$ .
  - г)  $2x - xy + y = 3$ .
3. Что называется решением линейного относительно  $x$  и  $y$  уравнения? Сколько различных решений имеет линейное уравнение? Как геометрически изображается множество таких решений?
4. Что называется решением системы, составленной из двух линейных относительно  $x$  и  $y$  уравнений? Сколько различных решений может иметь такая система?
5. Что называется определителем системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными? Что такое определитель неизвестного  $x$ ? Определитель неизвестного  $y$ ? В каких случаях, зная определитель такой системы и определитель каждого из неизвестных, мы можем найти решение системы?
6. Как по величинам определителей системы двух уравнений с двумя неизвестными и каждого из этих неизвестных можно судить о множестве решений системы?
7. Перечислите и проиллюстрируйте примерами известные вам свойства определителей второго порядка?
8. Что такое определитель третьего порядка?
9. Каким образом при помощи определителей можно найти решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными? Всегда ли это возможно?
10. Что можно сказать о множестве решений системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, определитель которой равен нулю?
11. Запишите в общем виде формулу разложения определителя по элементам его третьей строки и проиллюстрируйте её на конкретном примере.
12. Что называется определителем  $n$ -го порядка? Каковы его основные свойства?
13. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
14. Каковы способы вычисления определителей?
15. Что называется матрицей?
16. Что такое  $m \times n$ -матрица? Что называется вектор-строкой? вектор-столбцом?
17. Как определяется произведение матрицы на число? Сумма двух матриц? Всякие ли две матрицы можно сложить?
18. Как определяется произведение двух матриц? Каким условиям должны удовлетворять числа  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$ , чтобы произведение  $A \cdot B$   $m \times n$ -матрицы  $A$  на  $p \times q$ -матрицу  $B$  имело смысл? Какой размер будет иметь в этом случае матрица  $A \cdot B$ ?
19. Обладает ли операции умножения матриц свойством коммутативности? Свойством ассоциативности?
20. Что такое единичная матрица? Какими свойствами она обладает?

21. Какие матрицы называются квадратными? Всегда ли выполнимы операции сложения и умножения для квадратных матриц одного и того же порядка? Перечислите основные свойства этих операций.
22. Что называется определителем квадратной матрицы? Как можно вычислить определитель произведения двух матриц, зная величины определителей каждого из сомножителей?
23. Что такое обратная матрица? Всякая ли матрица имеет обратную? Сколько различных обратных матриц может существовать у одной и той же матрицы?
24. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?
25. В каких случаях и как именно при помощи определителей можно получить решение системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными?
26. Какая система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными называется однородной? Как по величине определителя этой системы можно судить о множестве её решений?
27. При каком условии система  $n$  линейных однородных линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет ненулевое решение?
28. Что такое ранг матрицы? Поясните свой ответ примерами.
29. В чем состоит метод Гаусса решения системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными? Проиллюстрируйте его на конкретном примере.
30. Сформулируйте условия разрешимости системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.
31. Как записывается в матричной форме система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными? Как её можно решить, используя матрицу, обратную к матрице коэффициентов? Всегда ли такое решение возможно?

## Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Запишите в общем виде уравнения прямой (в векторной и координатной форме), проходящей на плоскости  $xOy$  через данную точку перпендикулярно данному вектору. Приведите примеры.
2. Что называется общим уравнением прямой на декартовой координатной плоскости? Как будет расположена прямая относительно осей координат, если те или иные коэффициенты в её общем уравнении равны 0? Приведите примеры.
3. Какие специальные виды уравнений прямой на декартовой координатной плоскости вы знаете? Приведите примеры.
4. По каким формулам можно находить угол между двумя прямыми на декартовой координатной плоскости? Поясните свой ответ примерами. Сформулируйте условия коллинеарности и перпендикулярности двух прямых.
5. Напишите формулу, по которой определяется расстояние между двумя точками, если: а) точки имеют одинаковые абсциссы, но различные ординаты; б) точки имеют одинаковые ординаты, но различные абсциссы; в) одна из этих точек совпадает с началом координат.
6. Чем отличаются друг от друга декартовы координаты двух точек, симметричных относительно оси  $Oy$ ?
7. Как выражаются координаты середины отрезка через координаты его концов?
8. Как выражаются координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин?
9. Как по координатам трёх точек установить, лежат ли они на одной прямой?
10. Как убедиться, что данная точка лежит на данной линии?
11. Как найти точку пересечения двух линий, заданных своими уравнениями?
12. Всегда ли уравнение вида  $f(x; y)=0$  определяет некоторую линию на плоскости? Приведите примеры.

13. Как связаны декартовы и полярные координаты точки, если полюс совпадает с началом декартовой системы координат, а направление полярной оси – с положительным направлением оси абсцисс?
14. Каково будет направление окружности в полярных координатах, если центр окружности совпадает с полюсом, а радиус её равен  $a$ ?
15. Каков характерный признак, отличающий уравнение прямой в декартовой системе координат от уравнений других линий?
16. Как расположена прямая относительно системы координат, если в её уравнении отсутствует: а) свободный член, б) одна из координат, в) одна из координат и свободный член? Напишите уравнения осей декартовой системы координат.
17. Как вычислить угол между двумя прямыми? Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых?
18. Как найти угловой коэффициент прямой, если известно её общее уравнение? Можно ли найти угловой коэффициент прямой, не составляя её уравнения, если известны две её точки? Если да, то как это сделать?
19. Как найти расстояние от данной точки до данной прямой, заданной уравнением общего вида?
20. Сформулируйте определения эллипса, гиперболы и параболы. Каковы канонические уравнения этих линий и при каком расположении эллипса, гиперболы и параболы относительно осей координат получаются эти уравнения?
21. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы? Какие значения может принимать эта величина?
22. Какие названия носят параметры  $a$  и  $b$  в канонических уравнениях эллипса и гиперболы и почему они так названы?
23. Что называется центром эллипса и гиперболы?
24. Какой вид будут иметь формулы преобразования координат, если начало координат смещается в направлении оси  $Ox$  на расстояние трёх единиц масштаба и направления осей не меняются?
25. В каком случае при повороте системы координат угол поворота считается отрицательным?
26. Каков будет вид формул преобразования координат, если за новую ось абсцисс принять старую ось ординат, а за новую ось ординат – прямую  $y - 2 = 0$ ?
27. Как с помощью преобразования системы координат можно уничтожить член с произведением координат в общем уравнении линии второго порядка?
28. Какое множество точек называется выпуклым?
29. Докажите теорему о выпуклости пересечения выпуклых множеств точек.
30. Каков геометрический смысл линейного неравенства с двумя переменными и системы таких неравенств?

### Тема 3. Векторы в трёхмерном пространстве

1. Что называется вектором и как он изображается?
2. Что такое направленный отрезок? В каких случаях мы говорим о свободных векторах, скользящих векторах, связанных векторах?
3. Сформулируйте определение понятий коллинеарности и компланарности.
4. Дайте определения понятий суммы и разности векторов, противоположного вектора. Какими свойствами обладают соответствующие операции?
5. Что называется произведением вектора на вещественное число? Какими свойствами обладают соответствующая операция?
6. Что такое проекция вектора на ось? Величина этой проекции? Сформулируйте основные свойства проекций.
7. В чем состоит задача разложения вектора по заданным направлениям? Всегда ли она разрешима? Сколько различных решений она может иметь?

8. Что представляет собой декартова система координат в пространстве? Что такое координата точки, координата вектора? Как выражаются координаты вектора через координаты его начала и конца?
9. Что такое орты координатных осей? Как следует понимать записи вида  $a=(x; y; z)$ ? Каким образом проводятся линейные операции над векторами в координатной форме?
10. Что значит. Что точка  $C$  делит отрезок  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $\lambda$ ? Приведите примеры. Как можно найти точку, делящую данный отрезок в заданном отношении?
11. Докажите, что из трёх медиан произвольного треугольника можно построить треугольник.
12. Что называется координатами вектора?
13. Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его свойства и геометрический смысл?
14. Приведите известные вам формы для нахождения угла между двумя векторами и проекции вектора на ось (или на направление другого вектора).
15. Дайте определение правой и левой тройки векторов. Приведите примеры.
16. Можно ли задавать все три угла, образуемые вектором с осями координат?
17. Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства и геометрический смысл?
18. Что называется векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов? Каковы его свойства и геометрический смысл?
19. Как выражаются в координатах векторов различные действия над ними: сложение, умножение на число, скалярное, векторное и смешанное произведения?
20. Как выражаются в координатах векторов условия их коллинеарности, перпендикулярности, компланарности?

#### Тема 4. Аналитическая геометрия в пространстве

1. Запишите в общем виде (в векторной и координатной форме) уравнения плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Приведите примеры.
2. Что называется общим уравнением плоскости? Как будет расположена плоскость относительно координатных осей, если те или иные коэффициенты в её общем уравнении равны нулю? Приведите примеры.
3. По какой формуле можно составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки? Поясните свой ответ примерами.
4. Как можно найти величину угла между двумя плоскостями? В чём состоят условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей? Приведите примеры.
5. Каким образом можно аналитически описать прямую, проходящую через данную точку коллинеарно данному вектору? Приведите примеры.
6. По каким формулам можно найти угол между двумя прямыми? Прямой и плоскостью? В чём состоят условия коллинеарности и перпендикулярности двух прямых? Прямой и плоскостью? Поясните свой ответ примерами.
7. Какими способами можно аналитически задать прямую в декартовом координатном пространстве? Приведите примеры.
8. Почему прямые линии носят название линий первого порядка, а плоскости – поверхностей первого порядка?
9. Как проверить, лежит ли данная точка на поверхности, заданной уравнением?
10. Всегда ли два уравнения с тремя переменными определяют некоторую линию в пространстве? Приведите примеры.
11. Какое множество точек представляет уравнение с двумя переменными, если его рассматривать в пространстве?

12. Как получить уравнения проекции линии на координатные плоскости, если линия задана двумя уравнениями с тремя переменными?
13. При каких условиях общее уравнение второй степени с тремя переменными определяет сферу? Как найти её центр и радиус?
14. Как записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении плоской линии  $f(x; y)=0$  вокруг оси  $Ox$ ? Приведите примеры.
15. Каков характерный признак, отличающий уравнение плоскости в декартовых координатах от уравнений других поверхностей?
16. Как будет располагаться плоскость относительно осей координат, если в её уравнении отсутствуют те или иные члены?
17. Как определить направляющий вектор прямой, если она задана общим уравнением?
18. Как определить угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью?
19. Каковы условия перпендикулярности и параллельности двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости?
20. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?
21. При каком условии данная прямая лежит в данной плоскости?
22. Написать уравнения координатных осей, рассматривая их как пересечения координатных плоскостей.
23. Как найти расстояние между двумя параллельными плоскостями?

16. При каком условии эллиптический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  становится

поверхностью вращения с осью  $Oz$ ? То же для однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

17. Докажите, что линейное неравенство с тремя переменными определяет полупространство.

#### Тема 5. Элементы векторной алгебры

1. В чём состоит сущность метода исключения неизвестных?
  2. Какие преобразования системы линейных уравнений называются элементарными?
3. Какова схема применения метода исключения неизвестных для исследования и решения системы линейных уравнений?
  4. Что называется  $n$ -мерным вектором?
  5. Дайте определение линейных операций над  $n$ -мерными векторами.
  6. Что называется линейным векторным пространством? Приведите примеры.
  7. Что называется линейной комбинацией векторов?
8. В каком случае система векторов называется линейно независимой?
  9. Что называется базисом векторного пространства?
  10. Что называется координатами вектора в данном базисе?
11. Что называется размерностью векторного пространства?
12. Как производится преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
13. В чём состоит замена одного базисного вектора другим, в данный базис не входящим?

#### Тема 5. Введение в анализ



1. Сформулируйте определение функции. Что называется областью определения функции?
2. Перечислите основные способы задания функции. Приведите примеры.
3. Найдите области определения следующих функций:

$$\text{а) } y = \lg(2 - \sqrt{1+x}); \quad \text{б) } y = \sqrt{2 - \sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{в) } y = \arccos \frac{2}{3x-1}$$

4. Какая функция называется периодической? Приведите примеры.
5. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.
6. Какие функции называются элементарными? Приведите примеры.
7. Приведите примеры элементарных функций, естественной областью определения которых является: а) вся числовая ось, за исключением двух точек  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 3$   
б) все положительные значения  $x$ , за исключением тех же двух точек  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 3$
8. Как, имея график функции  $y = f(x)$ , можно построить графики функций  $y = f(kx)$ ,  $y = f(kx + b)$ ,  $y = Af(kx + b) + B$ ? Приведите примеры.
9. Сформулируйте определение предела переменной величины, предела функции при стремлении аргумента к некоторому числу и к бесконечности.
10. Как связано понятие предела функции с понятиями пределов слева и справа?
11. Какая величина называется бесконечно малой и каковы её основные свойства?
12. Какая величина называется бесконечно большой? Какова её связь с бесконечно малой?
13. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке и на отрезке.
14. Сформулируйте теорему об области непрерывности элементарных функций.
15. Исследуйте на непрерывность функцию  $y = \arctg \frac{1}{x}$ . Найдите пределы этой функции слева и справа в точке  $x = 0$
16. Покажите, что величины  $\sin x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ , бесконечно малые при  $x \rightarrow 0$ , эквивалентны друг другу.
17. Пусть  $x \rightarrow 0$ . При каком значении  $a$  бесконечно малые  $a \sin^2 x$  и  $(1 - \cos x)$  будут эквивалентны?

#### Тема 6. Производная и дифференциал

1. Сформулируйте определение производной. Найдите производную функции  $y = x/(x-1)$ , пользуясь только определением производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Что называется касательной к кривой в точке? Как составить её уравнение? Что называется нормалью к кривой в точке? Как составить её уравнение?
4. Каков механический смысл первой и второй производных?
5. Может ли функция иметь производную в точке, в которой она имеет разрыв?
6. Функция в данной точке дифференцируема. Следует ли отсюда, что она непрерывна в этой точке?
7. Перечислите общие правила дифференцирования функций и формулы дифференцирования основных элементарных функций.
8. Как найти первую и вторую производные функции, заданной параметрически?
9. Что называется дифференциалом функции? Что такое дифференциал независимой переменной?
10. Каков геометрический смысл дифференциала функции?

11. Чем отличается дифференциал функции от её приращения? Для каких функций дифференциал тождественно равен приращению?

#### Тема 7. Приложения производной для исследования функций

1. Каковы основные признаки возрастания и убывания функции?
2. Покажите, что функция  $y = e^x$  возрастает, а функция  $y = \sin x - x$  убывает в любом промежутке.
3. Что называется экстремумом функции? Как найти максимумы и минимумы функции? Сформулируйте два правила.
4. Приведите пример, показывающий, что обращение производной в нуль не является достаточным условием экстремума функции.
5. Чем отличается максимум функции, заданной на некотором отрезке, от её наибольшего значения? То же о минимуме и наименьшем значении функции.
6. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке? Всегда ли они существуют?
7. Как формулируется теорема Ролля? Каков её геометрический смысл?
8. Как формулируется теорема Лагранжа? Каков её геометрический смысл?
9. Перечислите типы неопределённостей, для раскрытия которых может быть использовано правило Лопиталя. Приведите примеры.
10. Напишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. В каком случае эта формула называется формулой Маклорена?
11. Напишите формулы Маклорена для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .
12. Как используется формула Тейлора для вычисления приближенных значений функции с заданной точностью? Приведите примеры.
13. Как находятся интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции? Приведите примеры.
14. Что называется асимптотой кривой?
15. Как находятся вертикальные и неvertикальные асимптоты графика функции?
16. Каковы основные пункты общей схемы исследования функции и построения её графика?

#### Тема 8. Приближенное решение уравнений

1. В чём состоят методы хорд, касательных и комбинированный метод приближенного решения уравнений?
2. В каком случае приближенное значение корня уравнения, полученное при помощи касательной, может оказаться лежащим вне отрезка, на котором отделен корень? Как этого избежать?

#### Тема 9. Функции нескольких переменных

1. Сформулируйте определение функции нескольких переменных.
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных? Каково её геометрическое изображение в случае функции двух или трёх переменных?
3. Каковы способы задания функции двух переменных?
4. Каковы способы геометрического изображения функций двух и трёх переменных? Что называется линией и поверхностью уровня?
5. Как определяются понятия предела и непрерывности функции нескольких переменных?
6. Приведите пример функции двух переменных, непрерывной всюду, кроме каждой точки окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .
7. Сформируйте определение частных производных. Каков их геометрический смысл в случае функции двух переменных?

8. Что называется полным приращением и полным дифференциалом функции нескольких переменных?
9. Докажите, пользуясь понятием дифференциала, что относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей.
10. Докажите, пользуясь понятием дифференциала, что максимальная относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.
11. Сформулируйте определения частных производных высших порядков
12. Докажите, что функция  $u = \ln \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$  удовлетворяет уравнению
 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
13. Как определяется экстремум функции двух переменных? Каковы необходимые условия экстремума?
14. Как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области?
15. Что называется условным экстремумом и каков метод его нахождения?
16. Что называется производной по направлению и градиентом функции нескольких переменных?
17. Как выражается производная по направлению через градиент и единичный вектор направления?
18. Докажите, что производная от функции по направлению линии уровня этой функции равна нулю.

#### Тема 10. Неопределенный интеграл

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные для одной и той же функции могут отличаться только на постоянное слагаемое.
2. Что называется неопределенным интегралом? Каков его геометрический смысл?
3. Постройте кривые семейства  $y = \int x dx$ , проходящие через точки  $M_1(2; 1)$ ,  $M_2(2; 2)$ ,  $M_3(2; 3)$ .
4. Укажите целесообразные подстановки для отыскания интегралов:

$$\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx, \quad \int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx, \quad \int \frac{e^{\arctg x}}{1 + x^2} dx, \\ \int x^5 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^6} dx, \quad \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

5. Выведите формулу интегрирования «по частям».
6. Укажите, какие из приведенных ниже интегралов целесообразно интегрировать «по частям»:

$$\int x \cdot \arctg x dx, \quad \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx, \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx, \\ \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx, \quad \int \sqrt[7]{\sin^3 x \cdot \cos^3 x} dx, \quad \int \cos x \cdot \ln(\sin x) dx, \\ \int x^2 \cdot e^x dx.$$

7. В чём заключается метод интегрирования рациональных функций?

Тема 11. Определённый интеграл

1. Сформулируйте определение определенного интеграла. Каковы его свойства и геометрический смысл?
2. Как можно геометрически истолковать тот факт, что определенный интеграл от функции, не равной тождественно нулю, может оказаться равным нулю?
3. Докажите формулу Ньютона – Лейбница.
4. При каких условиях возможна замена переменной интегрирования в определенном интеграле?
5. Как определяется длина дуги кривой? Каков способ её вычисления?
6. Выведите формулу для объема тела вращения.
7. Как вычисляется объем тела с заданными площадями параллельных сечений?
8. Дайте определение площади поверхности тела вращения.
9. Выведите формулу трапеций и Симпсона для приближенного вычисления определенного интеграла.
10. Что называется несобственным интегралом с бесконечными пределами?
11. Может ли бесконечно протяженное тело иметь конечный объем? Рассмотрите пример тела, образованного вращением кривой  $y = e^{-x} (0 \leq x < +\infty)$  вокруг оси  $Ox$

Тема 12. Двойной интеграл

1. Что называется интегральной суммой для функции двух переменных по некоторой области?
2. Что называется двойным интегралом? Каковы его основные свойства?
3. Как производится вычисление двойного интеграла?
4. Напишите формулу для площади криволинейной трапеции при помощи определенного интеграла функции одной переменной и двойного интеграла. Преобразуйте вторую формулу в первую.
5. Напишите формулу, выражающую объём цилиндрического тела через двойной интеграл.
6. Вычислите интеграл Пуассона с помощью двойного интеграла.

Тема 13. Дифференциальные уравнения

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Что называется порядком дифференциального уравнения? Приведите примеры.
2. Что называется решением дифференциального уравнения? Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое – частным? Каков их геометрический смысл?
3. Сформулируйте теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
4. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными и как оно интегрируется? То же об однородном и линейном уравнениях первого порядка.
5. Докажите, что в точках прямой, проходящей через начало координат, касательные к интегральным кривым однородного уравнения первого порядка параллельны.
6. Определите, к какому виду относятся следующие дифференциальные уравнения:

$$(x-y) \frac{dy}{dx} = 2xy; \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = (1+x^2)^2; \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y^3}{x^2-1} = 0$$

7. Приведите пример дифференциального уравнения второго порядка, решение которого можно найти методом понижения порядка.
8. Что называется характеристическим уравнением и как оно составляется для заданного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
9. Как составляется общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

#### Тема 14. Ряды

1. Что называется рядом? В каком случае ряд называется сходящимся, а в каком расходящимся? Что называется суммой ряда?
2. Почему при исследовании сходимости ряда можно отбрасывать любое конечное число начальных членов?
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости рядов. Приведите примеры.
4. Сформулируйте признак сходимости и расходимости рядов, основанный на сравнении рядов. Приведите примеры.
5. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов. Приведите примеры.
6. Какие ряды называются знакопеременными? Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда. Приведите примеры.
7. Какие числовые знакопеременные ряды называются абсолютно сходящимися и какие условно сходящимися?
8. Укажите, какие из приведенных ниже рядов сходятся абсолютно и какие условно:

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} + \dots, \blacksquare$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} + \dots, \blacksquare$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots, \blacksquare$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{4a} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{na} + \dots$$

9. Какой ряд называется функциональным? Что называется областью сходимости функционального ряда? Приведите примеры.
10. Что называется степенным рядом?
11. Что называется интервалом (промежутком) сходимости и радиусом сходимости степенного ряда? Как их можно найти?
12. Как найти область сходимости степенного ряда? Приведите примеры.
13. Приведите примеры степенных рядов, имеющих нулевой, конечный и бесконечный радиусы сходимости.
14. Что называется рядом Тейлора функции? В каком случае этот ряд называется рядом Маклорена?
15. Напишите разложения в ряд Маклорена функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ . Для каких областей  $x$  справедливы эти разложения?
16. В чём заключается суть применения рядов для приближенных вычислений? Приведите примеры.
17. Как применяются ряды для вычисления приближенных значений определенных интегралов? Приведите примеры.

## Примеры заданий для самостоятельной работы

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2)(x - \sqrt{x^2 + 1})$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x^3 + 1)}{x^2 + 3x + 2}$
3. Выполнить интегрирование  $\int (3x - 2)^2 \cos 5x dx$ ,
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  в области, ограниченной линиями  $x = 0, y = 0, x + y = -3$ .
5. Найти производную функции  $u = xyz$  в точке  $A(1; 2; 4)$  по направлению от точки  $A$  к  $B(3; 4; 5)$ .

### 5.3. Промежуточный контроль: экзамен, зачет

#### Перечень вопросов к экзамену

##### Раздел 1 (I семестр)

1. Матрица. Определение. Виды матриц. Свойства матриц. Единичная матрица.
2. Операции над матрицами.
3. Линейные преобразования матриц.
4. Ранг матрицы. Линейная зависимость строк, столбцов матрицы.
5. Определители квадратных матриц. Свойства определителей.
6. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы. Теорема Лапласа
7. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью союзной матрицы. Пример.
8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Пример
9. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы. Пример.
10. Система линейных однородных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
11. Система  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли.
12. Векторы, линейные операции над векторами.
13. Линейная зависимость векторов, коллинеарность, компланарность.
14. Проекция вектора на ось, плоскость, разложение вектора по базисным векторам.
15. Нелинейные операции над векторами. Скалярное произведение 2-х векторов и его свойства.
16. Нелинейные операции над векторами. Векторное произведение 2-х векторов и его свойства.
17. Нелинейные операции над векторами. Смешанное произведение 3-х векторов и его свойства.
18. Разложение векторного произведения по базисным векторам.
19. Понятие  $n$ -мерного вектора, гиперплоскость.
20. Собственные числа, собственные вектора.
21. Преобразование координат вектора в  $n$ -мерном пространстве.
22. Декартова и полярная системы координат. Уравнение линии в них. Примеры.
23. Связь декартовой системы координат и полярной.
24. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости: расстояние между двумя точками.
25. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости: деление отрезка в за-

данном отношении.

26. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

27. Уравнение прямой в отрезках на осях. Общее уравнение прямой и его исследование.

28. Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

29. Общее уравнение прямой и его исследование. Его связь с другими уравнениями прямой.

30. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

31. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости: точка пересечения двух прямых.

32. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости: расстояние от точки до прямой.

33. Окружность. Определение. Общее уравнение. Каноническое уравнение.

34. Эллипс. Определение. Общее уравнение. Каноническое уравнение. Фокус. Эксцентриситет.

35. Гипербола. Определения. Канонические уравнения.

36. Парабола. Определения. Канонические уравнения.

37. Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

38. Прямая в пространстве. Канонические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой.

39. Прямая и плоскость в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности прямой и плоскости.

40. Поверхности второго порядка.

### **Перечень вопросов к экзамену**

#### **Раздел 2 (II семестр)**

1. Множество. Действия над множествами.

2. Функция. Определение. Способы задания. Область определения. Множество значений. Примеры.

3. Четность и нечетность функции. Монотонность. Ограниченность. Периодичность. Примеры.

4. Элементарные функции, их свойства.

5. Числовая последовательность. Определение. Определение и геометрический смысл предела числовой последовательности.

6. Основные теоремы о пределах.

7. Бесконечно малая величина. Определение. Свойства бесконечно малых.

8. Бесконечно большая величина. Свойства бесконечно больших. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

9. Правила раскрытия неопределенностей  $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ , заданных отношениями многочленов

10. Предел функции в точке. Определение. Геометрический смысл.

11. Первый и второй замечательные пределы.

12. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса, Коши.

13. Задачи, приводящие к понятию производной: о касательной, о скорости движения, о производительности труда.

14. Определение производной. Пример нахождения производной функции, исходя из определения производной.

15. Основные правила дифференцирования.

16. Производная сложной и обратной функции.
17. Таблица производных.
18. Логарифмическое дифференцирование.
19. Производные высших порядков.
20. Уравнение касательной к графику функции в данной точке
21. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши (формулировки, геометрический смысл).
22. Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей.
23. Достаточные условия возрастания и убывания функции.
24. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.
25. Достаточные условия экстремума функции.
26. Выпуклость функции. Точки перегиба.
27. Асимптоты графика функции.
28. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
29. Первообразная функция. Таблица интегралов.
30. Неопределенный интеграл. Определения.
31. Свойства неопределенного интеграла.
32. Метод подведения функции под знак дифференциала.
33. Интегрирование иррациональных выражений.
34. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простые дроби.
35. Интегрирование тригонометрических функций.
36. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
37. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
38. Понятие определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Экономический смысл определенного интеграла.
39. Свойства определенного интеграла.
40. Формула Ньютона-Лейбница.
41. Метод замены переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
42. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей плоских фигур, вычисление объемов тел вращения.
43. Дифференциальные уравнения. Общие понятия. Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных.
44. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
45. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
46. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.
47. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

### **Раздел 3 (III семестр)**

#### **Перечень вопросов к экзамену**

1. Предел и непрерывность функций 2-х переменных
2. Частные производные. Необходимое условие дифференцируемости функции.
3. Полный дифференциал. Достаточное условие дифференцируемости функций.
4. Частные производные и дифференциал высших порядков.
5. Экстремум функций 2-х переменных. Необходимое и достаточное условия.
6. Метод наименьших квадратов.
7. Числовые ряды. Основные свойства. Сумма ряда, остаток ряда, частичная сумма.
8. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
9. Признак сходимости Даламбера числовых рядов.
10. Признак сходимости Коши числовых рядов.



11. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
12. Положительный ряд. Необходимое и достаточное условия сходимости.
13. Абсолютная и условная сходимость знакочередующегося ряда.
14. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость.
15. Степенные ряды. Свойства степенных рядов.
16. Степенные ряды. Радиус и область сходимости.
17. Ряды Тейлора и Маклорена.
18. Разложение в степенные ряды элементарных функций:  $e^x$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ .
19. Разложение в степенные ряды элементарных функций:  $(1+x)^a$ ,  $\ln(x)$ .

#### **Раздел 4 (IV семестр)**

##### **Перечень вопросов к зачету**

1. Дифференциальные уравнения в частных производных, их порядок. Решение дифференциального уравнения.
2. Уравнение колебания струны. Уравнение колебания мембраны.
3. Уравнение теплопроводности.
4. Задача Коши для уравнений различных типов. Класс корректности поставленной задачи.
5. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными, их свойства.
6. Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
7. Замена переменных в дифференциальном уравнении второго порядка.
8. Приведение уравнений различных типов к каноническому виду.
9. Общее решение волнового уравнения. Формула Д'Аламбера, ее частные случаи.
10. Применение формулы Д'Аламбера к задаче с ограниченной и полуограниченной струной.
11. Метод Фурье. Задача Штурма-Лиувилля.
12. Решение неоднородного волнового уравнения и волнового уравнения с неоднородными граничными условиями.
13. Метод Фурье для уравнения теплопроводности.
14. Решение неоднородного уравнения теплопроводности и уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями.
15. Уравнение теплопроводности для стержня бесконечной длины.
16. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.
17. Уравнение Лапласа. Различные краевые задачи.
18. Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах.
19. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле в круге методом Фурье.
20. Формулы Грина. Потенциалы простого и двойного слоя.
21. Метод функций Грина.
22. Построение функций Грина. Задача Дирихле для полупространства и шара, для полуплоскости и круга.
23. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле.

##### **Образцы тестов, заданий к зачету, билетов, тестов, заданий к экзамену**

Зачет:

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + x - 2}$$

2. Найти градиент скалярного поля  $u = xyz$  в точке  $M(-2, 3, 4)$ .

3. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$

4. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка.

$$9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + u_y = 0.$$

5. Решить родное волновое уравнение с заданными начальными и граничными условиями.

$$u(0, t) = u(l, t) = 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

**Задачи:**

**Раздел 1.**

1. Найти площадь треугольника ABC с вершинами A (2,1,0), B (1,0,-2), C (5,1,3).

2. Найти угол между прямыми  $l_1, l_2$

$$l_1: \vec{r} = \vec{i} - 2\vec{k} + t(2\vec{j} - \vec{k})$$

$$l_2: \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $P_0(2,1,4)$  перпендикулярно прямой:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

4.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти:  $2A^T A - 4A^{-1}$

5. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -4 \end{cases}$$

**Раздел 2.**

1.  $y = 2^{x^2 \sin 7x} + \frac{x}{x+1}$  найти  $y'$  - ?

2.  $y = (\sin x)^{x^2}$  найти  $y'$  - ?

3.  $y = \operatorname{tg}^2 3x$  найти  $dy$  - ?

4.  $y = xe^{3x}$  найти  $y''$  - ?

5.  $\int \frac{dx}{x(2 + \ln x)}$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) Основная литература:

1. *Веретенников В.Н.* Высшая математика. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Часть 1. - СПб, изд. РГГМУ, 2008.-254 с. - Режим доступа: [http://elibr.rshu.ru/files\\_books/pdf/img-503201600.pdf](http://elibr.rshu.ru/files_books/pdf/img-503201600.pdf)
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб, Изд. «Лань», 2009, 2080 с.

### б) дополнительная литература:

1. *Баврин И.И.* Краткий курс высшей математики., М., Физматлит, 2003. – 328 с.
2. *Шипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2001.
3. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 4-е изд. – М. Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
4. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука, 1984.
5. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) – СПб, Изд. «Лань», 2008, 240 с.
6. *Ильин В.А., Куркина А.В.* Высшая математика. — М.: Проспект: изд. МГУ, 2010. – 608 с.
7. *Берман Г.Н.* Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. – СПб, Изд. «Лань», 2008, 608 с.
8. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. — М., Физматлит, 2006. – 336 с.

### в) Программное обеспечение:

windows 7 66233003 24.12.2015  
office 2010 49671955 01.02.201

### г) Интернет-ресурсы: не используются

### д) Профессиональные базы данных:

- База данных Web of Science
- База данных Scopus

### е) Информационные справочные системы

- ЭБС «ГидроМетеоОнлайн». Режим доступа: <http://elibr.rshu.ru/>
- Национальная электронная библиотека (НЭБ). Режим доступа: <https://нэб.рф>
- ЭБС «Znanium». Режим доступа: <http://znanium.com/>
- ЭБС «Проспект Науки». Режим доступа: <http://www.prospektnauki.ru/>
- Электронно-библиотечная система elibrary. Режим доступа: <https://elibrary.ru/>

## 7. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Вид учебных занятий	Организация деятельности студента
Лекции	Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобще-

Вид учебных занятий	Организация деятельности студента
	<p>ния; пометать важные мысли, выделять ключевые слова, термины.            Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь.            Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе.            Если самостоятельно не удастся разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом (семинарском) занятии.</p>
<b>Практические занятия</b>	<p>Проработка рабочей программы, уделяя особое внимание целям и задачам структуре и содержанию дисциплины.            Конспектирование источников.            Работа с конспектом лекций, - подготовка ответов к контрольным вопросам, просмотр рекомендуемой литературы и работа с текстом.            Решение тестовых заданий, решение задач и другие виды работ.</p>
<b>Индивидуальные задания (подготовка докладов, рефератов)</b>	<p>Знакомство с основной и дополнительной литературой, включая справочные издания, зарубежные источники, конспект основных положений, терминов, сведений, требующих запоминания и являющихся основополагающими в этой теме.            Составление аннотаций к прочитанным литературным источникам и другое. Изложение основных аспектов проблемы, анализ мнений авторов и формирование собственного суждения по исследуемой теме.</p>
<b>Подготовка к экзамену</b>	<p>При подготовке к экзамену необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу, вопросы для подготовки к экзамену и т.д.</p>

**8. Информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Тема (раздел) дисциплины	Образовательные и информационные технологии	Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем
<p>Линейная алгебра и аналитическая геометрия            Дифференциальные и интегральные исчисления функции одной переменной            Дифференциальные и интегральные исчисления функции многих переменных, ряды            Математическая физика</p>	<p>Образовательные технологии:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• интерактивное взаимодействие педагога и аспиранта;</li> <li>• сочетание индивидуального и коллективного обучения;</li> <li>• занятия, проводимые в форме диалога, дискуссии;</li> <li>• технология развития критического мышления</li> </ul> <p>Информационные технологии:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• проведение занятий с использованием слайд-презентаций;</li> <li>• организация взаимодействия педагога с аспирантом посредством</li> </ul>	<p>Программное обеспечение:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Microsoft Windows</li> <li>• Microsoft Office</li> </ul> <p>Информационно-справочные системы:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ЭБС «ГидроМетеоОнлайн»</li> <li>• Национальная электронная библиотека (НЭБ)</li> <li>• ЭБС «Znanium»</li> <li>• ЭБС «Перспектив Науки»</li> <li>• Электронно-библиотечная система eLibrary</li> </ul>

Тема (раздел) дисциплины	Образовательные и информационные технологии	Перечень программного обеспечения и информационных справочных систем
	вом электронной информационно-образовательной среды <ul style="list-style-type: none"> <li>• использование профессиональных баз данных и информационно-справочных систем</li> </ul>	Профессиональные базы данных: <ul style="list-style-type: none"> <li>• База данных Web of Science</li> <li>• База данных Scopus</li> </ul>

## 9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

**Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа** – укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации: мультимедиа оборудованием: портативным компьютером (ноутбуком), переносным экраном, мультимедиа-проектором.

**Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа (практических занятий)** – укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации.

**Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций** – укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации.

**Учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации** – укомплектована специализированной (учебной) мебелью, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации.

**Помещение для самостоятельной работы** – укомплектовано специализированной (учебной) мебелью, оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечено доступом в электронную информационно-образовательную среду организации. Самостоятельная работа проводится в читальном зале библиотеки.

## 10. Особенности освоения дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

При определении формы проведения занятий с обучающимся-инвалидом учитываются рекомендации, содержащиеся в индивидуальной программе реабилитации инвалида, относительно рекомендованных условий и видов труда.

При необходимости для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья создаются специальные рабочие места с учетом нарушенных функций и ограничений жизнедеятельности.